

Aspects énergétiques des systèmes oscillants

Cadre de référence de la leçon

- (PH4.5.1) Déterminer le travail d'une force extérieure exercée par un ressort.
- (PH4.5.2) Connaître et exploiter l'expression de l'énergie potentielle élastique.
- (PH4.5.3) Connaître et exploiter la relation entre le travail d'une force appliquée par un ressort et la variation de l'énergie potentielle élastique.
- (PH4.5.4) Connaître et exploiter l'expression de l'énergie mécanique d'un système solide-ressort.
- (PH4.5.5) Exploiter la conservation et la non-conservation de l'énergie mécanique d'un système solide-ressort.
- (PH4.5.6) Exploiter les diagrammes d'énergie.
- (PH4.5.7) Déterminer le travail du couple de torsion.
- (PH4.5.8) Connaître et exploiter l'expression de l'énergie potentielle de torsion.
- (PH4.5.9) Connaître et exploiter la relation entre le travail du couple de torsion et la variation de l'énergie potentielle de torsion.
- (PH4.5.10) Connaître et exploiter l'expression de l'énergie mécanique du pendule de torsion.
- (PH4.5.11) Exploiter la conservation et la non-conservation de l'énergie mécanique du pendule de torsion.
- (PH4.5.12) Exploiter l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur et celle de l'énergie cinétique pour déterminer l'énergie mécanique du pendule pesant dans le cas de faibles oscillations.
- (PH4.5.13) Exploiter la conservation de l'énergie mécanique du pendule pesant dans le cas de faibles oscillations.

Compétence ciblée

- (CC4) La mécanique. Analyser, suivre et prévoir l'évolution d'un système mécanique en adoptant un modèle simple. Résoudre une situation-problème liée à un système mécanique en mouvement par une étude dynamique ou énergétique.

1

Travail d'une force et énergie d'un solide

Cadre de référence : PH4.5.1, PH4.5.6

1) Travail d'une force (cas de translation)

Pour une force constante :

$$W_{AB}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB} = \|\vec{F}\| \|\overrightarrow{AB}\| \cos \alpha$$

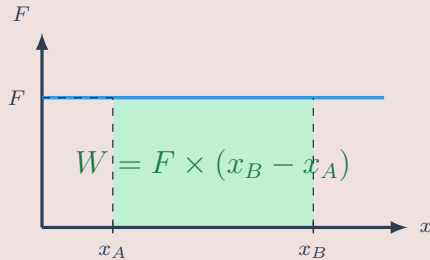
Pour une force non constante :

$$W_{AB}(\vec{F}) = \int_{x_A}^{x_B} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

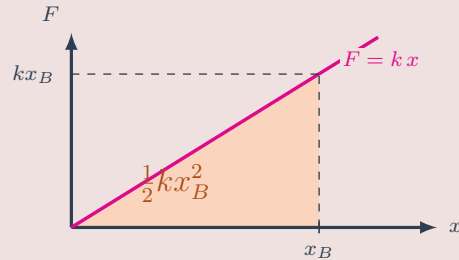
Exemple de la force de rappel d'un ressort $\vec{T} = -kx\vec{i}$:

$$W_{AB}(\vec{T}) = \frac{1}{2}kx_A^2 - \frac{1}{2}kx_B^2$$

Le travail se lit comme une aire. Puisque $W = \int_{x_A}^{x_B} F dx$, le travail d'une force est **l'aire comprise entre la courbe $F = f(x)$ et l'axe des abscisses**, entre x_A et x_B . L'aire est comptée positivement au-dessus de l'axe, négativement au-dessous. La même lecture vaut en rotation avec $M_\Delta = f(\theta)$ et $W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M_\Delta d\theta$.



Force constante : l'aire est celle d'un rectangle



Force variable : l'aire du triangle donne l'énergie élastique

Sur la figure de droite, l'aire hachurée est celle du triangle de base x_B et de hauteur kx_B : elle vaut $\frac{1}{2}kx_B^2$, c'est-à-dire exactement **l'énergie potentielle élastique** emmagasinée par le ressort.

C'est ainsi que se retrouvent, sans calcul intégral, les expressions $E_{pe} = \frac{1}{2}kx^2$ et $E_{pt} = \frac{1}{2}C\theta^2$.

2) Travail d'une force (cas de rotation)

Moment constant :

$$W_{\theta_1 \rightarrow \theta_2}(\vec{F}) = M_\Delta(\vec{F}) \Delta\theta$$

Moment non constant :

$$W_{\theta_1 \rightarrow \theta_2}(\vec{F}) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M_\Delta(\vec{F}) d\theta$$

Pour un couple de torsion de moment $M_\Delta(\vec{C}) = -C\theta$:

$$W_{\theta_1 \rightarrow \theta_2}(M_\Delta(\vec{C})) = \frac{1}{2}C\theta_1^2 - \frac{1}{2}C\theta_2^2$$

3) Énergie d'un solide

Énergie cinétique :

$$E_C = \frac{1}{2}mV^2 \quad (\text{translation})$$

$$E_C = \frac{1}{2}J_\Delta\omega^2 = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2 \quad (\text{rotation})$$

Énergies potentielles :

$$E_{pp} = mgz + \text{cte}, \quad E_{pe} = \frac{1}{2}kx^2 + \text{cte}, \quad E_{pt} = \frac{1}{2}C\theta^2 + \text{cte}$$

Énergie mécanique : somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle.

Sans frottement, l'énergie mécanique se conserve. Avec frottement, elle diminue.

2 Énergie du pendule élastique

Cadre de référence : PH4.5.2 à PH4.5.5

Énergie du pendule élastique

$$E_C = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$$E_{pe} = \frac{1}{2} k x^2$$

$$E_m = E_C + E_{pe} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

En absence de frottement :

$$E_m = \frac{1}{2} m V_{max}^2 = \frac{1}{2} k X_{max}^2$$

3 Énergie du pendule de torsion

Cadre de référence : PH4.5.7 à PH4.5.11

1) Travail du couple de torsion et énergie potentielle

Le moment du couple de rappel exercé par le fil est $\mathcal{M}_\Delta(\vec{C}) = -C\theta$. Son travail lorsque l'abscisse angulaire passe de θ_1 à θ_2 vaut :

$$W_{\theta_1 \rightarrow \theta_2} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} (-C\theta) d\theta = \frac{1}{2} C \theta_1^2 - \frac{1}{2} C \theta_2^2$$

Ce travail ne dépend pas du chemin suivi : on définit l'énergie potentielle de torsion

$$E_{pt} = \frac{1}{2} C \theta^2 + \text{cte}$$

La constante est nulle si l'on choisit $E_{pt} = 0$ pour $\theta = 0$. On a alors :

$$W_{\theta_1 \rightarrow \theta_2} = E_{pt}(\theta_1) - E_{pt}(\theta_2) = -\Delta E_{pt}$$

2) Énergie mécanique

$$E_C = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2, \quad E_{pt} = \frac{1}{2} C \theta^2$$

$$E_m = E_C + E_{pt} = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} C \theta^2$$

Sans frottement, l'énergie mécanique se conserve :

$$E_m = \frac{1}{2} C \theta_m^2 = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}_{\max}^2 = \text{constante}$$

Il y a transfert permanent entre énergie cinétique et énergie potentielle de torsion.

Avec frottement, l'énergie mécanique diminue : la variation ΔE_m est égale au travail des forces de frottement, énergie dissipée sous forme de chaleur.

4 Énergie du pendule pesant et du pendule simple

Cadre de référence : PH4.5.12, PH4.5.13

1) Énergies du pendule pesant

En prenant l'origine des énergies potentielles de pesanteur à la position d'équilibre :

$$E_{pp} = m g d (1 - \cos \theta)$$

Pour de **petites oscillations**, $1 - \cos \theta \simeq \frac{\theta^2}{2}$, d'où

$$E_{pp} \simeq \frac{1}{2} m g d \theta^2$$

L'énergie cinétique du solide en rotation vaut :

$$E_C = \frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}^2$$

L'énergie mécanique s'écrit donc :

$$E_m = \frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m g d \theta^2$$

2) Conservation de l'énergie mécanique

En l'absence de frottement, E_m reste constante :

$$E_m = \frac{1}{2} m g d \theta_m^2 = \frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}_{\max}^2$$

En dérivant $E_m = \text{cte}$ par rapport au temps, on retrouve d'ailleurs l'équation différentielle du mouvement :

$$\frac{dE_m}{dt} = J_{\Delta} \dot{\theta} \ddot{\theta} + m g d \theta \dot{\theta} = 0 \quad \implies \quad \ddot{\theta} + \frac{m g d}{J_{\Delta}} \theta = 0$$

Cas du pendule simple : $d = L$ et $J_{\Delta} = mL^2$, donc

$$E_m = \frac{1}{2} m L^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m g L \theta^2$$