

Cadre de référence de la leçon

- [PH4.4.1](#) Connaître le mouvement oscillatoire.
- [PH4.4.2](#) Reconnaître les oscillations libres.
- [PH4.4.3](#) Reconnaître l'amortissement des oscillations, ses différents types et ses régimes.
- [PH4.4.4](#) Connaître que, dans le cas d'un amortissement faible (régime pseudo-périodique), la pseudo-période est voisine de la période propre.
- [PH4.4.5](#) Connaître les caractéristiques de la force de rappel exercée par un ressort sur un solide en mouvement.
- [PH4.4.6](#) Exploiter les courbes $x_G(t)$, $v_G(t)$ et $a_G(t)$.
- [PH4.4.7](#) Appliquer la deuxième loi de Newton à un système oscillant (solide-ressort) pour établir l'équation différentielle du mouvement et vérifier sa solution dans les cas horizontal, incliné ou vertical.
- [PH4.4.8](#) Déterminer la nature du mouvement du système (solide-ressort) et écrire les équations $x_G(t)$, $v_G(t) = \frac{dx_G}{dt}$ et $\ddot{x}_G(t)$, puis les exploiter.
- [PH4.4.9](#) Connaître la signification des grandeurs physiques intervenant dans l'équation horaire $x_G(t)$ du système (solide-ressort) et les déterminer à partir des conditions initiales.
- [PH4.4.10](#) Établir l'expression de la période propre du système (solide-ressort).
- [PH4.4.11](#) Connaître et exploiter l'expression de la période propre et de la fréquence propre du système (solide-ressort).
- [PH4.4.12](#) Déterminer les deux types d'amortissement (solide et fluide) à partir des formes des diagrammes d'espace $x_G(t)$.
- [PH4.4.13](#) Connaître l'expression du couple de rappel exercé par un fil de torsion sur un corps solide oscillant.
- [PH4.4.14](#) Appliquer la relation fondamentale de la dynamique à un pendule de torsion pour établir l'équation différentielle du mouvement dans le cas des frottements négligeables.
- [PH4.4.15](#) Déterminer la nature du mouvement du pendule de torsion, écrire et exploiter les équations $\theta(t)$, $\dot{\theta}(t) = \frac{d\theta}{dt}$ et $\ddot{\theta}(t)$.
- [PH4.4.16](#) Connaître la signification des grandeurs physiques intervenant dans l'équation horaire du pendule de torsion et les déterminer à partir des conditions initiales.
- [PH4.4.17](#) Établir l'expression de la période propre du pendule de torsion.
- [PH4.4.18](#) Connaître et exploiter l'expression de la période propre et de la fréquence propre du pendule de torsion.
- [PH4.4.19](#) Exploiter les diagrammes $\theta(t)$, $\dot{\theta}(t)$ et $\ddot{\theta}(t)$ pour déterminer les grandeurs qui caractérisent le mouvement du pendule de torsion.
- [PH4.4.20](#) Déterminer les deux types d'amortissement (solide et fluide) à partir des formes des diagrammes $\theta(t)$.
- [PH4.4.21](#) Appliquer la relation fondamentale de la dynamique, dans le cas de la rotation, à

un pendule pesant pour établir l'équation différentielle du mouvement dans le cas des petites oscillations, les frottements étant négligeables.

PH4.4.22

Déterminer la nature du mouvement du pendule pesant dans le cas de faibles oscillations, écrire et exploiter les équations $\theta(t)$, $\dot{\theta}(t)$ et $\ddot{\theta}(t)$.

PH4.4.23

Connaître la signification des grandeurs physiques intervenant dans l'équation horaire $\theta(t)$ du pendule pesant et les déterminer à partir des conditions initiales.

PH4.4.24

Établir l'expression de la période propre du pendule pesant.

PH4.4.25

Connaître et exploiter l'expression de la période propre et de la fréquence propre du pendule dans le cas des petites oscillations.

PH4.4.26

Exploiter les diagrammes $\theta(t)$, $\dot{\theta}(t)$ et $\ddot{\theta}(t)$ pour déterminer les grandeurs qui caractérisent le mouvement du pendule pesant dans le cas de faibles oscillations.

PH4.4.27

Définir le pendule simple synchrone au pendule pesant.

PH4.4.28

Connaître l'expression de la période propre d'un pendule simple.

PH4.4.29

Reconnaître l'excitateur, le résonateur et le phénomène de résonance mécanique, ainsi que les conditions de sa production.

PH4.4.30

Reconnaître l'influence de l'amortissement sur les régimes de résonance.

PH4.4.31

Appliquer la deuxième loi de Newton et la relation fondamentale de la dynamique dans le cas de la rotation à un système mécanique oscillant composé d'un corps en translation rectiligne et d'un autre en rotation autour d'un axe fixe, dans différentes situations, pour établir les équations différentielles du mouvement et déterminer des grandeurs cinématiques et dynamiques.

Travaux pratiques

TP-PH4.5

Système oscillant (solide-ressort).

TP-PH4.6

Pendule de torsion.

TP-PH4.7

Pendule pesant.

Compétence ciblée

CC4

La mécanique. Analyser, suivre et prévoir l'évolution d'un système mécanique en adoptant un modèle simple. Résoudre une situation-problème liée à un système mécanique en mouvement par une étude dynamique ou énergétique.

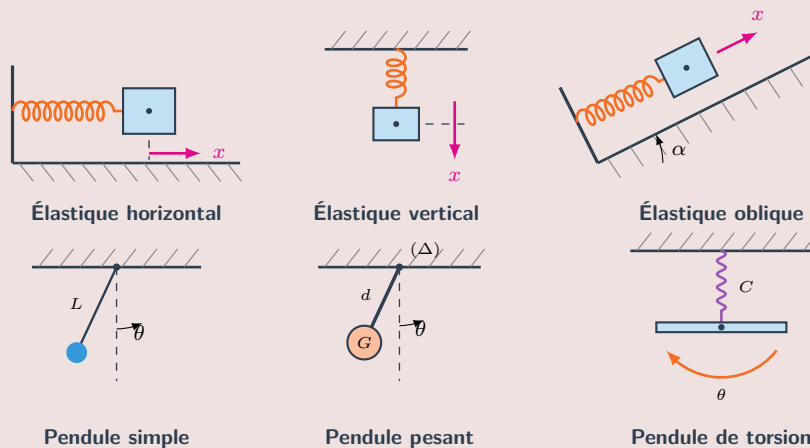
1

Les oscillateurs mécaniques

Cadre de référence : PH4.4.1 à PH4.4.4, PH4.4.6

Un oscillateur mécanique est un mobile qui effectue un mouvement de va-et-vient autour de sa position d'équilibre stable.

Exemples : pendule élastique, pendule de torsion, pendule pesant, pendule simple.



Les six oscillateurs mécaniques au programme

Caractéristiques des mouvements oscillatoires

- position d'équilibre stable ;
- période propre ;
- amplitude.

Amortissement des oscillations mécaniques

L'amortissement est une atténuation de l'amplitude à cause du frottement.

On distingue trois régimes :

- régime périodique (pas de frottement) ;
- régime pseudopériodique (faible amortissement) ;
- régime apériodique (fort amortissement).

Oscillations forcées

Les oscillations forcées sont obtenues lorsqu'un excitateur impose sa période T_e à l'oscillateur.

Résonance

Le phénomène de résonance mécanique se produit lorsque la période T_e des oscillations forcées est voisine de la période propre T_0 du résonateur.

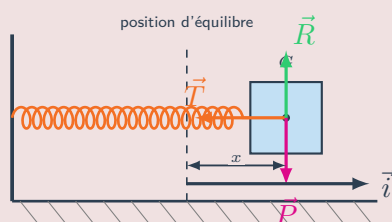
2

Le pendule élastique

Cadre de référence : PH4.4.5 à PH4.4.12 — TP-PH4.5

Un pendule élastique (système solide-ressort) est constitué d'un solide de masse m fixé à un ressort de constante de raideur k . Il se rencontre dans trois positions : horizontale, verticale ou inclinée. Dans les trois cas, on repère le solide par son abscisse x comptée **à partir de la position d'équilibre**, et on obtient la *même* équation différentielle.

1) Cas horizontal : les étapes de la mise en équation



Bilan des forces et axe de projection

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m \vec{a}_G$$

projection sur $\vec{i}$ →

Étape 1. Système : le solide. Référentiel : terrestre galiléen.

Étape 2. Bilan : $\vec{P}$, $\vec{R}$ et la tension $\vec{T} = -kx\vec{i}$.

Étape 3. Deuxième loi de Newton : $\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m \vec{a}_G$.

Étape 4. Projection sur $\vec{i}$: $\vec{P}$ et $\vec{R}$ sont *perpendiculaires* à $\vec{i}$, leurs projections sont nulles.

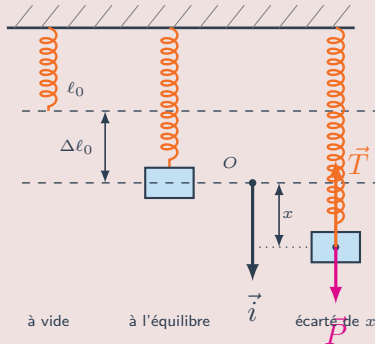
Étape 5. Il reste $-kx = m\ddot{x}$, soit l'équation différentielle ci-dessous.

Les cinq étapes, dans l'ordre

$$0 + 0 - kx = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

2) Cas vertical : le rôle de l'allongement à l'équilibre



Les trois états du ressort

À l'équilibre, le solide est immobile :

$$\vec{P} + \vec{T}_0 = \vec{0} \Rightarrow m g = k \Delta \ell_0$$

Écarté de x vers le bas, l'allongement devient $\Delta \ell_0 + x$ et la projection sur $\vec{i}$ (orienté vers le bas) donne :

$$m g - k(\Delta \ell_0 + x) = m \ddot{x}$$

Les deux termes constants $m g$ et $k \Delta \ell_0$ **se compensent** d'après la condition d'équilibre. Il ne reste que :

La projection, étape par étape

$$-k x = m \ddot{x} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

C'est **exactement** l'équation du cas horizontal : le poids ne change pas la période, il déplace seulement la position d'équilibre de $\Delta \ell_0 = \frac{m g}{k}$.

3) Cas oblique et solution commune

Sur un plan incliné d'angle α sans frottement, la projection sur la ligne de plus grande pente donne $m g \sin \alpha - k(\Delta \ell_0 + x) = m \ddot{x}$, avec cette fois $k \Delta \ell_0 = m g \sin \alpha$ à l'équilibre : les constantes se compensent encore et l'on retrouve la même équation.

Dans les trois cas, la solution est de la forme :

$$x(t) = X_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi\right)$$

avec la période propre :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

X_m (amplitude) et φ (phase à l'origine) se déterminent à partir des conditions initiales $x(0)$ et $\dot{x}(0)$. La période ne dépend ni de l'amplitude, ni de l'inclinaison, ni de g .

3

Le pendule de torsion

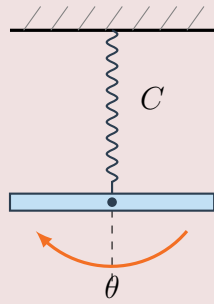
Cadre de référence : PH4.4.13 à PH4.4.20 — TP-PH4.6

1) Description

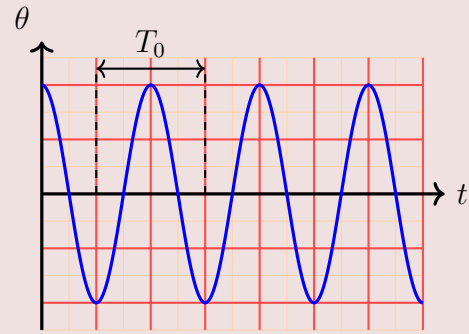
Un pendule de torsion est constitué d'un solide suspendu à un fil de torsion vertical. Écarté de sa position d'équilibre d'un angle θ , le fil exerce sur le solide un **couple de rappel** de moment :

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{C}) = -C \theta$$

où C est la **constante de torsion** du fil, en $\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{rad}^{-1}$.



Pendule de torsion



Oscillations libres non amorties

2) Équation différentielle du mouvement

Système : le solide. Référentiel : terrestre galiléen. On néglige les frottements. La relation fondamentale de la dynamique appliquée à la rotation autour de l'axe Δ donne :

$$\sum \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}_{\text{ext}}) = J_{\Delta} \ddot{\theta}$$

Le poids et la réaction du fil ont un moment nul par rapport à Δ ; il reste le couple de rappel :

$$-C \theta = J_{\Delta} \ddot{\theta}$$

D'où l'équation différentielle :

$$\ddot{\theta} + \frac{C}{J_{\Delta}} \theta = 0$$

Solution :

$$\theta(t) = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

θ_m est l'amplitude (en rad), φ la phase à l'origine (en rad) ; les deux se déterminent à partir des conditions initiales.

Période propre :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J_{\Delta}}{C}} \quad \text{et} \quad N_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{C}{J_{\Delta}}}$$

Le mouvement est **rectiligne sinusoïdal en rotation** : la période propre ne dépend ni de l'amplitude (isochronisme des oscillations) ni des conditions initiales.

3) Vitesse et accélération angulaires

$$\dot{\theta}(t) = \frac{d\theta}{dt} = -\theta_m \frac{2\pi}{T_0} \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

$$\ddot{\theta}(t) = \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\theta_m \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \theta(t)$$

Amortissement. En présence de frottements, l'amplitude décroît. La forme du diagramme $\theta(t)$ permet de distinguer les deux types :

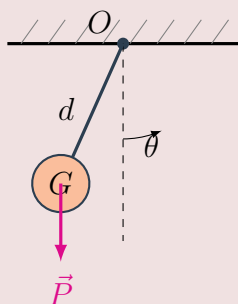
- **frottement fluide** : l'amplitude décroît de façon exponentielle, l'enveloppe du diagramme est une exponentielle décroissante ;
- **frottement solide** : l'amplitude décroît d'une quantité constante à chaque oscillation, l'enveloppe est une droite.

Dans le cas d'un amortissement faible, la **pseudo-période** T est voisine de la période propre T_0 .

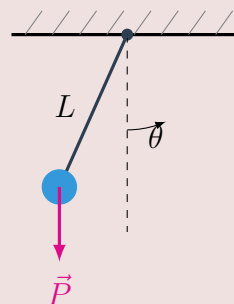
1) Description

Un pendule pesant est un solide mobile autour d'un axe horizontal fixe Δ ne passant pas par son centre d'inertie G . Écarté de sa position d'équilibre, il oscille sous l'action de son poids.

On note $d = OG$ la distance de l'axe au centre d'inertie et J_Δ le moment d'inertie du solide par rapport à Δ .



Pendule pesant



Pendule simple synchrone

2) Équation différentielle du mouvement

Les frottements étant négligés, la relation fondamentale de la dynamique de rotation s'écrit :

$$\sum \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_{\text{ext}}) = J_\Delta \ddot{\theta}$$

La réaction de l'axe a un moment nul ; le moment du poids vaut $-mgd \sin \theta$:

$$-mgd \sin \theta = J_\Delta \ddot{\theta}$$

Cas des petites oscillations (θ faible, exprimé en radian) : $\sin \theta \simeq \theta$, d'où

$$\ddot{\theta} + \frac{mgd}{J_\Delta} \theta = 0$$

Solution :

$$\theta(t) = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

Période propre :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J_\Delta}{mgd}}$$

3) Le pendule simple

Un **pendule simple** est un corps de petites dimensions, de masse m , suspendu à un fil inextensible de longueur L et de masse négligeable.

C'est un cas particulier de pendule pesant : $d = L$ et $J_\Delta = mL^2$, donc

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{mL^2}{mgL}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

La période propre d'un pendule simple ne dépend ni de la masse ni de l'amplitude (pour de petites oscillations).

Pendule simple synchrone. Un pendule simple est dit **synchrone** d'un pendule pesant lorsqu'il

a la même période propre. Sa longueur est alors :

$$L = \frac{J_{\Delta}}{m d}$$

5

Le pendule simple : étude dynamique

Cadre de référence : PH4.4.27, PH4.4.28

Le pendule simple est une masse ponctuelle fixée à l'extrémité d'un fil inextensible de masse négligeable et oscillant sous l'effet de la pesanteur.

Étude dynamique

L'équation différentielle exacte est :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0$$

Pour les petites oscillations, $\sin \theta \simeq \theta$, donc :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \theta = 0$$

La solution est :

$$\theta(t) = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi\right)$$

avec la période propre :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

6

Oscillations forcées et résonance mécanique

Cadre de référence : PH4.4.29, PH4.4.30, PH4.4.31

1) Excitateur et résonateur

Dans un dispositif d'oscillations forcées :

- l'**excitateur** impose sa fréquence N (ou sa période T_e) au système ;
- le **résonateur** est le système oscillant qui subit cette excitation ; sa fréquence propre est N_0 .

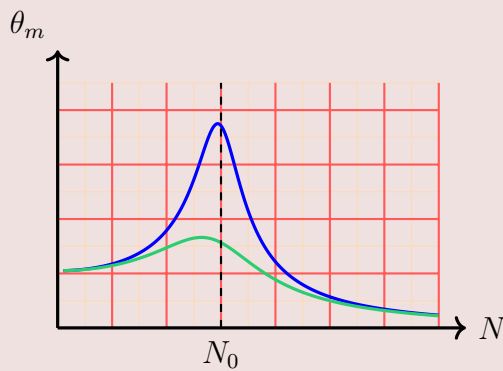
En régime permanent, le résonateur oscille à la fréquence de l'excitateur, et non à sa fréquence propre.

2) Le phénomène de résonance

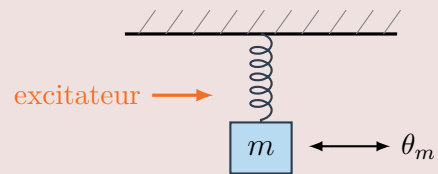
La **résonance mécanique** se produit lorsque la fréquence de l'excitateur est voisine de la fréquence propre du résonateur :

$$N \simeq N_0 \quad \text{soit} \quad T_e \simeq T_0$$

L'amplitude des oscillations du résonateur passe alors par un maximum.



Courbes de résonance : **amortissement faible**,
amortissement fort



Dispositif d'oscillations forcées

3) Influence de l'amortissement

- **Amortissement faible** : la résonance est **aiguë**. Le pic est étroit et de grande amplitude ; la fréquence de résonance est très proche de N_0 .
- **Amortissement fort** : la résonance est **floue**. Le pic est large et de faible amplitude ; la fréquence de résonance s'écarte de N_0 .

Exemples de résonance mécanique : la balançoire poussée en cadence, les vibrations d'un pont sous le pas cadencé d'une troupe, la rupture d'un verre soumis à un son intense, les vibrations d'un moteur à un régime déterminé.

La résonance peut être recherchée (instruments de musique, tamis vibrants) ou redoutée : elle est alors combattue en augmentant l'amortissement ou en décalant la fréquence propre de la structure.