

Cadre de référence de la leçon

- PH4.2.1** Connaître et exploiter les deux modèles de frottement fluide : $\vec{f} = -k v \vec{v}$ et $\vec{f} = -k v^2 \vec{v}$.
- PH4.2.2** Exploiter la courbe $v_G = f(t)$ pour déterminer la vitesse limite v_ℓ , le temps caractéristique τ , le régime initial et le régime permanent.
- PH4.2.3** Appliquer la deuxième loi de Newton pour établir l'équation différentielle du mouvement du centre d'inertie d'un solide en chute verticale avec frottement.
- PH4.2.4** Connaître et appliquer la méthode d'Euler pour la résolution approchée d'une équation différentielle.
- PH4.2.5** Définir la chute libre verticale.
- PH4.2.6** Appliquer la deuxième loi de Newton pour établir l'équation différentielle du mouvement du centre d'inertie d'un solide en chute libre verticale et la résoudre.
- PH4.2.7** Connaître et exploiter les caractéristiques du mouvement rectiligne uniformément varié et ses équations horaires.
- PH4.2.8** Exploiter le diagramme de la vitesse $v_G = f(t)$.

Travaux pratiques

- TP-PH4.2** Chute verticale avec frottement.

Compétence ciblée

- CC4** La mécanique. Analyser, suivre et prévoir l'évolution d'un système mécanique en adoptant un modèle simple. Résoudre une situation-problème liée à un système mécanique en mouvement par une étude dynamique ou énergétique.

1

La chute libre d'un corps solide

Cadre de référence : PH4.2.5, PH4.2.6, PH4.2.7

Un solide est en chute libre s'il n'est soumis qu'à son poids.
Pour un solide (S) de masse m en chute libre dans le champ de pesanteur :

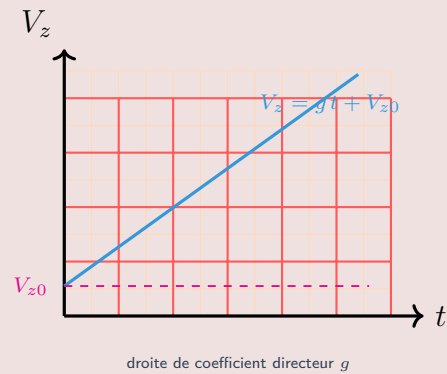
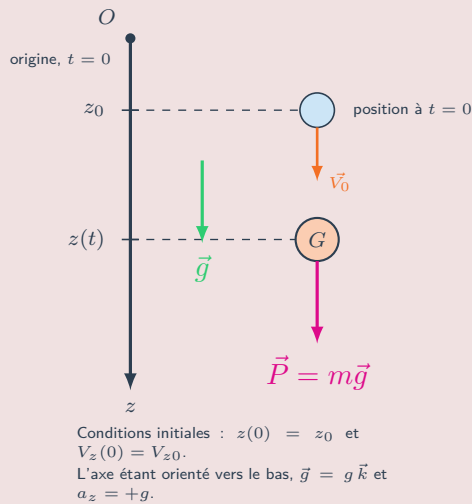
$$m\vec{a}_G = \vec{P} = m\vec{g}$$

D'où :

$$a_z = g \quad \text{et} \quad \ddot{z} = g$$

$$V_z = gt + V_{z0}$$

$$z(t) = \frac{1}{2}gt^2 + V_{z0}t + z_0$$



Chute libre verticale : une seule force, le poids

Le mouvement est rectiligne uniformément accéléré

2

La chute verticale avec frottement

Cadre de référence : PH4.2.1, PH4.2.2, PH4.2.3

1) Forces exercées par un fluide sur un solide

a) Poussée d'Archimède

La poussée d'Archimède est une force de contact exercée par un fluide sur un solide immergé.

Caractéristiques :

- point d'application : centre d'inertie de la partie immergée ;
- direction : verticale ;
- sens : du fluide vers le corps immergé ;
- intensité :

$$F_a = \rho_f V_{im} g = m_f g$$

b) Force de frottement fluide

Les forces exercées par un fluide sur un solide (S) sont équivalentes à une force unique $\vec{f}$.

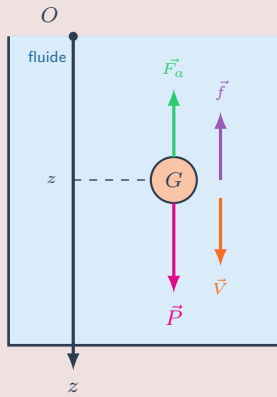
Caractéristiques :

- point d'application : centre d'inertie de (S) ;
- direction : celle de la vitesse $\vec{V}$;
- sens : opposé à celui de $\vec{V}$;
- intensité :

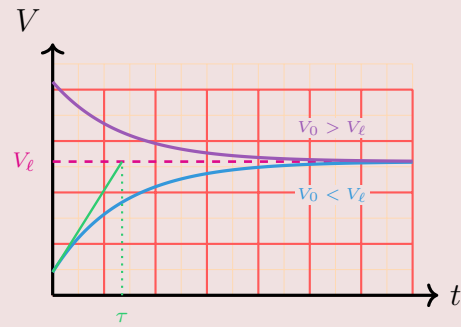
$$f = kV^n$$

Pour des vitesses faibles : $n = 1$, donc $f = kV$.

Pour des vitesses importantes : $n = 2$, donc $f = kV^2$.



Bilan des forces : le frottement $\vec{f}$ est toujours opposé à $\vec{v}$



Les deux allures de $V = f(t)$ selon la vitesse initiale

2) Équation différentielle vérifiée par la vitesse

Pour une bille de masse m chutant verticalement dans l'huile, on obtient :

$$\frac{dV}{dt} = A - BV^n$$

avec

$$A = g \left(1 - \frac{m_f}{m} \right), \quad B = \frac{k}{m}$$

3) Grandeurs caractérisant le mouvement

a) La constante de temps τ

La tangente à la courbe $V = f(t)$ au point O coupe l'asymptote en un point d'abscisse τ appelé temps caractéristique.

b) La vitesse limite V_{lim}

La vitesse limite vérifie :

$$\frac{dV}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{lim} = \left(\frac{A}{B} \right)^{1/n}$$

c) L'accélération initiale a_0

$$a_0 = A - BV_0^n$$

Dans le cas $V_0 = 0$:

$$a_0 = A = g \left(1 - \frac{m_f}{m} \right)$$

4) Résolution numérique par la méthode d'Euler

L'équation différentielle $\frac{dV}{dt} = A - BV^n$ n'a pas de solution analytique simple dès que $n = 2$. On la résout alors **pas à pas**, numériquement.

Le principe. Sur un intervalle de temps très court Δt , la vitesse varie si peu que l'on peut confondre la courbe avec sa tangente. La définition de la dérivée

$$a(t) = \frac{dV}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{V(t + \Delta t) - V(t)}{\Delta t}$$

donne alors l'**approximation d'Euler** :

$$V(t + \Delta t) \simeq V(t) + a(t) \Delta t$$

Le pas Δt est appelé **pas d'itération** : plus il est petit, plus le résultat est proche de la solution exacte, mais plus le nombre de calculs est grand.

L'algorithme. On part des conditions initiales $t_0 = 0$ et V_0 connues, puis on répète les deux opérations suivantes, dans cet ordre :

1. calculer l'accélération à l'instant t_i à partir de la vitesse déjà connue :

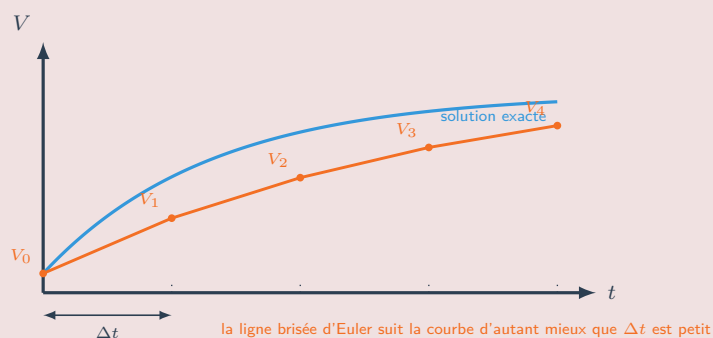
$$a_i = A - B V_i^n$$

2. en déduire la vitesse à l'instant suivant $t_{i+1} = t_i + \Delta t$:

$$V_{i+1} = V_i + a_i \Delta t$$

Mise en tableau. Le calcul se conduit commodément sous forme d'un tableau, à la main ou sur un tableur :

Instant	Vitesse	Accélération	Vitesse suivante
t_i	V_i	$a_i = A - B V_i^n$	$V_{i+1} = V_i + a_i \Delta t$
$t_0 = 0$	V_0	$a_0 = A - B V_0^n$	$V_1 = V_0 + a_0 \Delta t$
$t_1 = \Delta t$	V_1	$a_1 = A - B V_1^n$	$V_2 = V_1 + a_1 \Delta t$
$t_2 = 2\Delta t$	V_2	$a_2 = A - B V_2^n$	$V_3 = V_2 + a_2 \Delta t$
... et ainsi de suite			



Remarque. La méthode s'applique de la même façon à toute équation différentielle du premier ordre : dipôle RC , dipôle RL , décroissance radioactive, cinétique chimique.